「数学力」へ
－高大連携と出前講義－

佐野隆志
(理学部数理科学科)

1　数学力

本論文では、著者がここ数年間に関わった数学教育に関する活動のうち、２つの活動での著者の講演資料を掲載し、皆様のご意見を賜りたいと存じます。

１つ目の活動は、山形大学理学部数理科学科と山形県の高等学校教員数学部会が平成１５年度より始めました「山形大学と高等学校の数学教員の研究交流会」です。(詳しくは、数理科学科ホームページをご覧ください。) そのうち、初年度研究交流会での講演配布資料の抜粋を提示します。２つ目の活動は、いわゆる「出前講義」です。ここでは、青森北高等学校での配布資料を提示します。

ところで。つまらない？かもしれない計算を地道に行うこと。また、その計算が正確にそして（できれば）早く実行できること、続いて検算。また、いろいろな証明に触れること。新たな考え方に慣れること、など。このような経験を通して、「忍耐」「堅実」「正確」「変更（修正・訂正）」「試行」「観察」「類推」「読解」「表現」「論理展開」「適応」「習得」「思考」、などのいろいろな力（戦術）を訓練し身につける「場」の１つとして、算数・数学という教科を位置づけるという考えを著者は持っています。「就職力」にもつながるそれらいろいろな力は、不断の努力により身につけていくものだと思います。数学が苦手・嫌いであった方には、上述のような観点から「数学」を新たな気持ちで見つめ、その真髄に触れ「いろいろな力」を育てていく機会を大学で得てもらうこと、また得意な方には、将来の直接的な「就職力」にもなり得る「数学」の真の習熟をも、著者は期待しています。

今回の資料が以上述べました心持ちで「数学」を眺め返す一助にもなれば、と存じます。

2　高大連携

下記資料は，2003 年度に開催された第１回研究交流会での配布資料の抜粋です。学習指導要領の変更および改訂がすでに行われ、また、数年後には新たな指導要領に沿う教科指導がなされることをご承知いただき、本資料が現況と異なる内容を含みますことご寛容願います。

「山形大学と高校の数学教員の
研究交流会」 2003/10/15

「高校から大学へ」

限られた時間ではありますが，高校・大学での数学教育に関しての（高校での現状に全然？配慮しない）あくまで私的な意見や情報・題材等をお話したいと考えています。今回の話し合いに少しでも役立てば幸いです。

題材等提示案
★：すべての生徒を対象に
◆：数学を専門に学びたい生徒を対象に
◆◆：できる生徒を対象に
目次
Ａ　数学（物理）を大学で専門的に学びたい（本当にできる）生徒への対応案（私の希望）
　Ａ－１　かつての高校の教科書の活用
　Ａ－２　（読みもの的）専門書の紹介
　Ａ－３　高校数学から大学（数学科・数理科学科）数学への流れの紹介
Ｂ　きれいでない，バタバタした試行錯誤数学のすすめ
　Ｂ－１　$\sqrt{2}$ の近似分数列を作ろう
　Ｂ－２　問題例（漸化式）

Ｂ－３　ニュートンによる $\sin x$ のべき級数展開について

Ｃ　できる高校生のために

Ｃ－１「定義」を正しく理解せよ

Ｃ－２「事実」を正しく理解し「例」を持て

Ｃ－３「論理力」を強化せよ

Ｃ－４「存在性」を意識せよ

Ｃ－５「唯一性」を意識せよ

Ｃ－６　きれいで上手いエレガントな解法も大事にしてほしいが、手を動かして泥臭く考えることから逃げないように

Ｘ　でたらめ？な数学ー「発見的方法 (heuristic argument)」の紹介

Ｘ－１　スペクトルについて

Ｘ－２　オイラー？による $\sin x$ のべき級数展開について

Ｚ　おまけ

参考文献

１：無限のなかの数学：志賀浩二著・岩波新書

２：微積分に強くなる：柴田敏男著・講談社ブルーバックス B478

３：初等解析入門：落合卓四郎・高橋勝雄著・東大出版会 ISBN 4-13-062907-7

４：バナッハ・タルスキーのパラドックス：砂田利一著・岩波書店

５：解析概論：高木貞治著・岩波書店

Ａ　数学（物理）を大学で専門的に学びたい（本当にできる）生徒への対応案（私の希望）

Ａ－１　かつての高校の教科書の活用

◆・「数学II B」・「代数・幾何」のテキストで（２×２行列の）１次変換を教え，できれば，当時の入試問題を解かせたいです：例えば，行列式＝０なる変換や等長変換。また固有値・固有ベクトルの扱いや，対角化不可能な例なども教えたい。（現在，およその大学ではかつての「１次変換」についてのギャップを埋めることなく？１年次専門学生に向け「線形代数」が開講されている。）また，行列の積の非可換性や零因子についても強調しておきたい。

◆・「数学 III」などのテキストで，簡単な微分方程式の解き方やたて方などを学ばせたいです。

★・「高校の教科書（「代数・幾何」「基礎解析」など（東京書籍）」）が英訳されアメリカ数学会から出版されています。本テキストの使用は，生徒の「数学力」と「英語力」の育成に役立つと思います。英語ではどのように表現されているか、生徒には新鮮に映るかもしれません。（添付資料参照 … 省略）

◆・数学を大学で学びたい生徒には，高校理科では物理を選択するよう指導したい：量子力学，相対性理論などでの物理・数学への序章として高校物理から逃げてほしくないです。

Ａ－２　（読みもの的）専門書の紹介

◆・（「大学への数学」の別冊などに解説があるが）「実数論」を紹介する：数列の収束の定義（大学流ー「$\varepsilon - n_0$」表現）やそれに基づく証明，関数の連続性：$\varepsilon - \delta$ 論法など。（◆◆本当にできる生徒には，参考文献５を薦めてみてよいと思います。）

今年度の数理科学科１年次学生の数人から「高校生のとき少しでも知っていたらよかったのに…」という感想をもらいました。（大学での）数学の「抽象性」や「論理」について，事前に感じてもらうことは重要であると思います。実際，高校までの各人の数学のイメージと大学での数学とのギャップに苦しみ，留年・中退・除籍などに終る残念なケースも毎年何十か？は日本中で起きていると思います。ある程度の予備知識として，余裕のある生徒には大学の数学を高校３年時にでも見せることが必要だと思います。（読み物として，参考文献１・２を薦めます。）（数学も含め）どの分野への進路指導においても，大学進学後に「拒否反応」がでない，進学後のそれなりのイメージや覚悟？を生徒に少しでも与え，大学に進んでもらえたらという希望があります。（しかし一方で，現実を伝えすぎて大学を「避ける」・大学から「逃げられる」ことも恐れます。）

私個人の意見ですが，（どの学問分野もそうでしょうが）数学を嫌いだと思わせない教育が，次代の（優れた）「数学者」や「数学教育者」を生み育てる（１

つの）土壌となると思っています。少子化という現実をふまえ，他分野とのパイの取り合いを意識すべきかと思います。（例えば，高校理科において「化学」が他の教科（「物理」など）より，よい位置を占めていることは，大学等に多大なる影響を与えていると思います。）もっと数学を楽しませる環境を彼らに与えられたら，と思います。（ただし，いつかは苦しみも教えなくてはなりませんが。）そしてそのような役割を大学側も担うべきだと考えます。山形大学数理科学科によい生徒が入学することは当然歓迎しますが，他大学に進学したいと考える生徒を育てるお手伝いもしたいと思っています。

関連して大学院への進学状況についても触れます：ここ１・２年でしょうか，残念なことに教師希望の優秀な学生が大学院への進学を考えなくなったと私は感じています。採用者数枠が微妙に増え始めた状況等が反映している，また（思った以上に？）大学院修了者の採用実績があがらない，などが理由にあげられるかとも思います。（教員採用試験についてのお願い：１次の筆記試験において「専門」を問われることはもちろんですが，２次の個人面接等においても「口頭試験」でその専門性を見て頂くようお願い致します。）

なお，将来，年をとってから必要に迫られ大学院に通うことになるよりは是非採用後の早い段階で，大学院での教育を受ける機会を先生に与えてもらいたいと考えます。「数学力」を高めることも教育者としての自信につながるものと私は思います。

Ａ－３　高校数学から大学（数学科・数理科学科）数学への流れの紹介

数学Ⅰ・集合，数学Ａ・命題と証明－－－集合論（早い大学で１年から）

数学Ｂ・ベクトル，数学Ｃ・行列－－－線形代数（１年から）

数学Ｂ・複素数－－－函数論（複素解析）（２・３年生以降）

数学Ⅰ・確率，数学Ｂ・確率分布－－－数理統計，確率論

数学 II，数学 III －－－微分積分（１年から）

などの継続性があることを知っておいてもらうことも必要かと思います。

おまけ：大学での数学教育事情

(a) 山形大学工学部生は，１年次の必修で１年間かけて１変数の微積分を学んでいます。数年前までは半期でその内容を，残りの半期で多変数の微積分を扱っていました。数理科学科では，共通教科書（裳華房より出版予定）を作成し講義を担当しています。

(b) 東大の１年次理系学生への数学教育は２コースに分かれています。従前のままのコース以外に，軽め？のコースも用意されています。（参考文献３の「はじめに」を参照下さい。）

Ｂ　きれいでない，バタバタした試行錯誤数学のすすめ

Ｂ－１　$\sqrt{2}$ の近似分数列を作ろう（★数学が嫌いな高校生はどのような反応を示すでしょうか？）今年の全学１年生用の微積分の授業で，次の「★」を行いました。

★好きな正の整数をひとつ選びなさい。それを x_1 とよびましょう。次の式に順次代入することで、分数（有理数）の列 $x_2, x_3, \cdots$ が作れます。

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

x_5 まで求めて，実際分子を分母で割って近似値を求めましょう。計算の苦手な人は，電卓を用いてもかまいません。「実は，どんな正の整数から始めて分数列を作っていっても x_n は $\sqrt{2}$ にどんどん近づくそうですよー。」とコメントします。

◆◆できる生徒には近似精度についても考えてもらうとよいでしょう。

このときの授業は（感想からは）好評のようでした：「手作業」の楽しさもあるし結果についての「不思議さ」，各個人で自分だけの「近似分数列」が作れること，計算の大変さも感じること，などなど，でした。

次の**定理**のように紹介するのではなく，★のように「不思議さ」を感じさせる「ヘェー」的な導入工

夫を（特に数学が嫌い・苦手な生徒には）もっとすべきではないか，と感じます。

授業では次のように解説を行いました：

定理　x_1 を正数とする。このとき，

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

で定まる数列 $\{x_n\}$ が（$\sqrt{2}$ に）収束することを次の３つのアプローチで証明しなさい。

(1) 下に有界で単調減少（$n\geqq 2$）であることを示せ。

(2) コーシー列をなすことを示せ。

(3) 直接的に，$\sqrt{2}$ に収束することを示せ。

◆◆入試問題としては，(3) のやり方で実際

$$(0\leqq)x_{n+1}-\sqrt{2}\leqq\frac{1}{2}(x_n-\sqrt{2})$$

などを誘導して解くことになります。

(1)，(2) はいわゆる実数の連続性や完備性に基づく議論になります：収束すること（極限の「存在性」）から，極限についての更なる情報が必要条件として導けることを解説します。

Ｂ－２　問題例（漸化式）

◆◆**問題**　n を自然数とする。集合 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ に対し，X_n の空集合でない部分集合 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ が X_n の「分割」であるとは，

$$X_n=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_k$$

かつ $i\neq j$ に対し $P_i\cap P_j$ が空集合であるときをいう。X_n の「分割」の個数を p_n とおく。このとき，以下の問に答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) X_{n+1} の元 1 の属する部分集合の元の個数を考えることで，p_{n+1} を $p_1,p_2,\cdots,p_n$ を用いて表せ。

(3) p_5 を求めよ。

Ｂ－３　ニュートンによる $\sin x$ のべき級数展開について（参考文献１の p106 ～）：

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots$$

という２項展開を認め，$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ に代入して積分すると，

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

が得られます。また，

$$\sin x=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

と展開　　　ものとします。このとき，関係式

$$\sin(\arcsin x)=x$$

において，１番目の展開を２番目の展開に代入して a_0 から順次決定してみましょう。

Ｃ　できる高校生のために

Ｃ－１「定義」を正しく理解せよ

・逆行列

◆問題　$A^2-A+E=0$ なる正方行列 A は逆行列をもつことを示せ。

◆◆問題　A を正方行列, E を単位行列とする。このとき，つぎの同値性を示せ。

(1) $AB=BA=A+B$ なる正方行列 B が存在する。

(2) $A-E$ は逆行列をもつ。

・微分可能性

問題　実数全体を定義域とし，実数値をとる関数 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとする。

a) 任意の実数 x,y に対して，$f(x+y)=f(x)+f(y)$ が成り立つ。

b) $x=0$ において関数 $f(x)$ は微分可能である。

このとき，以下の問に答えよ。

◆ (1) $f(0)$ を求めよ。

◆◆ (2) 任意の実数 a に対し，$x=a$ において関数 $f(x)$ は微分可能であることを示せ。

◆ (3) 実数値関数 $F(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとする。このとき，$F(b)-F(a)$ を平均値の定理を用いてあらわせ。

(4) 関数 $f(x)$ はある定数 m を用いて，任意の実数 x に対し $f(x)=mx$ とあらわされることを示せ。

Ｃ－２「事実」を正しく理解し「例」を持て
例：微積分より
◆（ある点において）微分可能でない関数の例を答えよ。
◆「微分可能な関数は連続関数である」の対偶が言えるだろうか？
◆（ある点において）微分可能でない連続関数の例を答えよ。
・(発展）いたるところ微分可能でない連続関数の例を答えよ。
参考：高木関数，ワイエルシュトラスの関数，ベールのカテゴリー定理
◆ロルの定理において「微分可能性」が必要であることを示す例を与えよ。
◆例（行列)：零因子の例をあげよ。

Ｃ－３「論理力」を強化せよ
例：結論を否定する（背理法）
◆問題　$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で示せ。
「事実」(アルキメデスの原理「塵も積もれば山となる」）正の実数 x, y に対して，$n_0 x > y$ となる自然数 n_0 が存在する。
◆◆問題　上の結論の否定を与えよ。
◆問題　$a \geqq 0, ab \geqq ac$ ならば $b \geqq c$ は正しいか？

Ｃ－４「存在性」を意識せよ
例：「最大の自然数は 1 である」ことを次のように示しました：最大の自然数を M としよう。$M \geqq 1$ より 両辺 M をかけると $M^2 \geqq M$. M^2 は自然数であるから $M^2 = M$. 従って $M = 1$ が分かる。（どうして？）
◆◆例：ロルの定理は,「有界閉区間上の実数値連続関数は最大値・最小値をとる」という事実を認めれば高校でも証明できる。事実の証明は大学での実数論でなされるが，ここでは最大値の「存在性」からロルの定理が従うことを確認させたい。
例：中間値の定理－これもまさしく「存在」定理である。(◆個数についての主張ができないことを,「絵」で理解させたい。）できる学生には，実数論で証明されることを伝えたい。

Ｃ－５「唯一性」を意識せよ
◆問題　逆行列が存在すれば，それはただ１つであることを示せ。
例：数列の極限の唯一性
例：微分方程式の解の一意性（大学で）

Ｃ－６　きれいで上手いエレガントな解法も大事にしてほしいが、手を動かして泥臭く考えることから逃げないように　解法パターンを記憶することも最低限必要かもしれないが，自分で少しでも考えるように。

「数学的帰納法」での $n = 1$ の確認：このような姿勢を生徒にはもってもらいたいです。また,「絵」をかくー図示する，生徒を育ててもらいたいです。

Ｘ　でたらめ？な数学－「発見的方法 (heuristic argument)」の紹介

Ｘ－１　スペクトルについて
数級数
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|\, x \,| < 1)$$
(ただし，$x^0 = 1$ としておく）のように，行列 A の｀大きさ’が｀小さければ’
$$(1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$
（ノイマン級数）で与えられることが知られています。次の事実を，この展開を形式的に用いて説明してみましょう：

事実　行列 $1 - AB$ が逆行列をもてば，$1 - BA$ も逆行列をもつ。

(ただし，1 は恒等行列を表す。）前述の展開を用いましょう：
$$C := (1-AB)^{-1} = 1+AB+ABAB+ABABAB+\cdots$$
の両辺に左から B 右から A をかけて，1 を加えると
$$BCA+1 = (BA+BABA+\cdots)+1 = (1-BA)^{-1}$$

となり，左辺が $1-BA$ の逆行列になりそうです。実際，◆◆

$$\begin{aligned}(1-BA)(BCA+1) &= B(1-AB)CA-BA+1\\ &= BA-BA+1=1\end{aligned}$$

より事実が示されました。

X－２　オイラー？による $\sin x$ のべき級数展開について（参考文献１の p132～）：

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i}$$

の右辺を展開すると，$\sin nz$ は

$$\frac{n}{1}\cos^{n-1} z\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\sin^3 z$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5} z\sin^5 z+\cdots$$

この式において $nz=x$ とおき，n を大きくする。このとき，$\sin z = z = \dfrac{x}{n}, \cos z = 1$ なる近似で上式を置き換えて $n\to\infty$ とすると，

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

となります。

Z　おまけ（昨年度「体験入学」で配布した資料から）… 省略

3　出前講義

著者はこれまでに高等学校への「出前講義」を３回行いました：県内２、県外１、です。ここでは、青森での資料を提示致します：

Thinking in Mathematics

青森北高等学校にて　2005/10/01

この講義では，いろいろな例をみたり少し手を動かしたりして，数学的な考え方を感じてもらえたらと思っています。

$\boxed{1}$ 不思議（？）な真実 I（ハムサンドの定理）

A, B, C を３つの（大きさに限りのある）立体図形としましょう。このとき，それぞれの立体の体積をちょうど半分に分ける平面が少なくとも１つあります。

「2 枚のパンでハムをはさんでハムサンドを作るとき，包丁をうまく使えば，２枚のパンとハムのそれぞれを等しく切り分けることができる」そうです。不思議でしょう？こんなことが証明できるんですから。

$\boxed{2}$ 不思議（？）な真実 II（ボルスクーウラムの定理）

地球上の各地で同時刻に、たとえば気温と湿度を計ることにしましょう。すると，それらが一致する少なくとも１組の直径に関する対点があります。

「ある場所と地球のちょうど裏側の場所で，気温と湿度が等しくなる」そうです。気圧などの「場所を変えれば連続的に変化する」2 組の実数値関数について定理が成立します。

以上の２つの真実は，次に述べる「中間値の定理」（数学 III で扱う）の「一般化」から示されます。
参考図書：数学ワンポイント双書　「不動点定理」（野口　宏著）

$\boxed{3}$ 中間値の定理（数学 III）

閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数 f は $f(a)\neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c)=k$$

となる $[a,b]$ の点 c が少なくとも１つ存在する。（図示しますと …）

（哲学的な話ではありますが,）存在しないような対象を考察しても意味がないので，数学では「存在性」はとても重要です。（その次には，どれだけ存在するか，もしくはただ一つ（唯一）なのかが気にな

ります。）

$\boxed{4}$ 手を動かしてみましょうⅠ（無理数の存在，数学 I）

$1 \div 17$ を筆算で計算してみましょう。（ノート 1 ページ分？の量です。）

$$1 = 17 \times 0 + 1, 10 = 17 \times 0 + 10,$$

$$100 = 17 \times 5 + 15, 150 = 17 \times 8 + 14, \ldots,$$

と計算していくと，余りは

$$1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12,$$

とでて，さて次は何でしょうか？

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647 \cdots$$

同様に $2 \div 7$ の余りは、$2, 6, 4, 5, 1, 3$ とでて次は何になるでしょう？

このようにいつまでも割り切れない（無限小数の）ときは、同じ余りがしばらくすると必ずでてきて循環しそうですが，それはどうしてでしょう?? (理由を考えてみましょう! ヒント：「余り」に着目)

従って，循環しない無限小数は分数（＝有理 (rational 比 ratio であらわされる）数）ではありません。たとえば，

$$0.101001000100001000001000000 1 \cdots$$

のように循環しない小数は、無理数 (irrational 比であらわされない) であることになります。(詳しくは，参考図書 1 の 42 ページから，を参照ください。）

$\boxed{5}$ ギャンブル必勝法

勝ちか負けしかない勝負を考えます。勝てば賭け金の倍額が得られ，負ければ賭け金は没収されるルールです。1 円のお金を賭けて勝負を始めます。勝てば 1 円の儲け。負ければ次に 2 円を賭けます。勝てばトータルで 1 円の儲け。負ければ更に $2^2 = 4$ 円賭けて勝負します。勝てばトータルで $8 - (1 + 2 + 4) = 1$ 円の儲けとなります。もし，n 回連続で負け続けても $n + 1$ 回目に 2^n 円賭けて勝てば，やっぱりトータル 1 円の勝ち，となります。勝ったところで，また同じ戦法を繰り返せば毎回 1 円ずつ儲けていけるはず。どうしてみんなこの手で億万長者になろうとしないのでしょう …

$\boxed{6}$ 手を動かしてみましょうⅡ（ユークリッドの互除法）

$\frac{247}{221}$ は既約分数でしょうか?別の言い方をすれば，221 と 247 の最大公約数は 1 でしょうか?次の計算で，x, y, z を求めてみましょう。

$$247 = 221 \times 1 + x, 221 = x \times y + z, y = z \times 2 + 0.$$

（わり算を実行して商と余りを求めてみましょう。）このとき，実は z が 221 と 247 の最大公約数になります。

整数が 2 つ与えられたとして，大きいほうを a，小さいほうを b と呼びましょう。具体例ですでに説明した「ユークリッドの互除法」とよばれる最大公約数の求め方をもう一度まとめると。。。まず，a を b で割ります。割り切れればそこでおしまい（このときは，b が最大公約数)。割り切れなければ，余り $c(< b)$ が得られます。このとき b を c で割ります。割り切れれば c が最大公約数。そうでなければ，余り $d(< c)$ が得られます。この操作を繰り返し，割り切れたところでおしまいです。（余り 1 がでてくれば，最大公約数は 1 です。）

実は，2 つの整式に対してもユークリッドの互除法で最大公約数にあたる整式が求められます。

$\boxed{7}$ 森を見よう・全体像をつかもう

次の 2 つの計算を筆算で行ってみましょう。

$$8355 \times 732, \qquad 8000 \times 700$$

日本で習う筆算は，枝葉から見て景色を眺めるようなものです。つまり，(桁を間違わないようにするためでしょうが）下の桁から計算するように習ったのではないでしょうか？でも，実は桁の大きいところが本当は大事なわけですよね。上の計算で言えば，後者の答えが分かれば前者の答えの細かいところは、気にならないかもしれません。（大学院生の時に，筆

算を「位の高いところからさせる」国もあると授業で聞いて，ハットさせられたことがありました。)

おまけ 1 : 無限個の数の足し算 I

$S := 1+2+2^2+2^3+\cdots$ の答えを次のように考えました : S の 2 倍 $2S$ は，$2+2^2+2^3+\cdots$. 従って，$S-2S = \{1+2+2^2+2^3+\cdots\}-\{2+2^2+2^3+\cdots\} = 1$. よって， $S=-1$. しかし，S は正数の和だからこれはおかしい？

おまけ 2 : 無限個の数の足し算 II

$1-1+1-1+1-1+1-\cdots$ の答えを次のように考えました :

(a) $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$.
(b) $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$.
(c) その他

どれがあっているのでしょう？

おまけ 3 : 最大の自然数は 1 である

最大の自然数を M としましょう。$M \geqq 1$ より 両辺 M をかけると $M^2 \geqq M$. M^2 は自然数であり M は最大の自然数であるから $M^2 = M$. したがって $M=1$ が分かりますね？

おまけ 4 : バナッハ・タルスキーのパラドックス（数学の錬金術）

大きさの異なる 2 つの球体を考えます。このとき，小さいほうを適当に有限個に分割してそれらを同じ形のまま適当な方法で寄せ集めると大きい方を作ることができることが知られています。これは，大学で学ぶ「選択公理」を認めれば証明できる事実！です。

おまけ 5 : 半円の弧の長さは直径と等しい？

半径 1 の半円の弧の長さは？です。直径の上に半径 $\frac{1}{2}$ の半円を 2 つのせましょう。これら 2 つの半円の弧の長さの和はやはり？です。同じようにそれぞれの半円にまた 2 つ半円を書き込みましょう。どんどん繰り返していくと，n 回の操作で半径 $\frac{1}{2^n}$ の半円が 2^n 個できています。従って弧の長さの和はやはり？です。一方，それら半円達はどんどん直径に近づいていきます。そして，最後には一致するはず，です。つまり，？と直径 2 とは一致するはずですね？

おまけ 6 : いつも部屋が空いているホテル

すべての部屋に通し番号がついたホテルがあります。このホテルでは，お客様が来るたびに次のようにして新しいお客さんを受け入れます : n 号室のお客様には $n+1$ 号室に移ってもらう。すると 1 号室が空くので，そこに新しいお客さんにはいってもらう。満室になることはないようですね？

参考図書

１：無限のなかの数学：志賀浩二著・岩波新書
２：微積分に強くなる：柴田敏男著・講談社ブルーバックス B478
３：バナッハ・タルスキーのパラドックス：砂田利一著・岩波書店